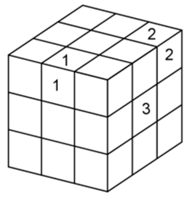
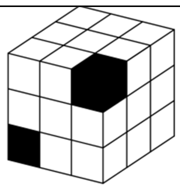
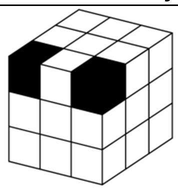
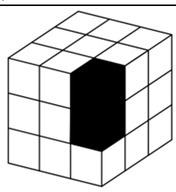
Exercice 1
Un air de famille

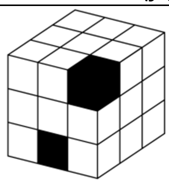


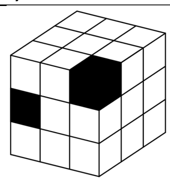
1. Si un des deux cubes noir occupe la place centrale, l'autre occupe un coin, la position médiane sur une arête ou la position centrale sur une face. Chacune de ces possibilités ne fournit qu'un type de cube.
2. Chaque face du cube a quatre voisines (avec lesquelles elle partage une arête). La cinquième face lui est *opposée*. Elles ne peuvent toutes les deux figurer sur la même vue perspective. Si deux petits cubes noirs montrent au moins deux de leurs faces, deux de ces faces seulement (une pour chacun) peuvent être sur des faces opposées du grand cube. Une représentation perspective bien choisie montre au moins une face de chaque.
Le seul cas à examiner est celui dans lequel une face d'un cube noir occupe la position centrale d'une face du grand cube. Dans ce cas, si le second cube noir montre deux ou trois faces, une est située sur une face voisine de celle où se trouve le premier. Il ne reste donc qu'un seul cas : celui dans lequel les deux cubes noirs ont chacun une face en position centrale sur deux faces opposées.
3. A. On examine le cas dans lequel les deux cubes noirs ont chacun une face sur la même face du grand cube.
a. Les deux cubes noirs sont dans des coins (figures 1 et 2)
b. Un cube noir est dans un coin, l'autre au centre d'une arête (figures 3, 4 et 5)
c. Un cube noir est dans un coin, l'autre au milieu de la face (figure 6)
d. Les deux cubes noirs au centre de deux arêtes (figures 7 et 8)
e. Un cube noir est au milieu de la face, l'autre au centre d'une arête (figure 9)

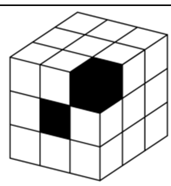

1

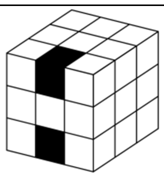

2

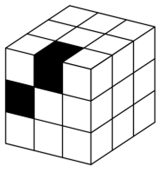

3

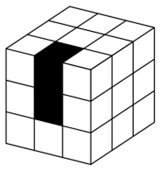

4


5

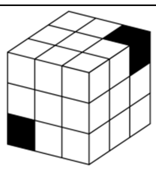

6

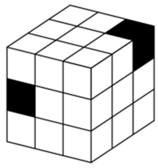

7

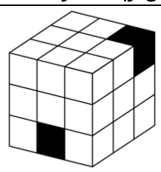

8

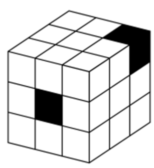

9

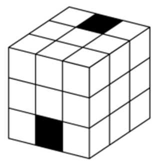
B. On examine ensuite le cas dans lequel aucune face du grand cube ne fait apparaître deux faces noires.
a. Les cubes noirs sont dans des coins (figure 10)
b. Un cube noir est dans un coin, l'autre au centre d'une arête (figures 11 et 12)
c. Un cube noir est dans un coin, l'autre au milieu d'une face (figure 13)
d. Les deux cubes noirs sont au milieu d'arêtes (figures 14 et 15)
e. Un cube noir est au centre d'une arête, l'autre au milieu d'une face (figures 16 et 17)
f. Les deux cubes noirs sont au centre d'une face (figure 18)

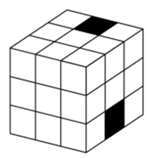

10

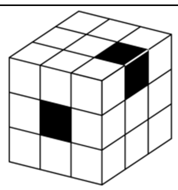

11

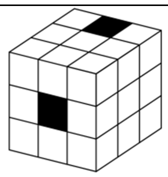

12

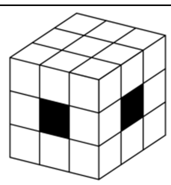

13


14


15


16


17


18

4. Il y a donc 22 cubes différents.

Exercice 2
Diversité dans l'unité

1. Cette liste est élaborée en groupant les diviseurs par deux :

$$\begin{aligned}5\,040 = 1 \times 5\,040 &= 2 \times 2\,520 = 3 \times 1\,680 = 4 \times 1\,270 = 5 \times 1\,008 = 6 \times 840 = 7 \times 720 = 8 \times 630 \\ &= 9 \times 560 = 10 \times 504 = 12 \times 420 = 14 \times 360 = 15 \times 336 = 16 \times 315 = 18 \times 280 \\ &= 20 \times 252 = 21 \times 240 = 24 \times 210 = 28 \times 180 = 30 \times 168 = 35 \times 144 = 36 \times 140 \\ &= 40 \times 126 = 42 \times 120 = 45 \times 112 = 48 \times 105 = 60 \times 84 = 63 \times 80 = 70 \times 72\end{aligned}$$

Cette liste comporte 30 produits de deux entiers distincts, soit 60 nombres. Elle a été élaborée en examinant dans l'ordre croissant les possibilités pour des entiers d'être le premier facteur de ce produit. Quand le premier facteur égale le second, la liste est terminée (la fin de la liste arrive avant su le nombre examiné n'est pas un carré parfait)
2. Dans la liste écrite ci-dessus, les dix premières décompositions ont pour premiers facteurs tous les entiers compris entre 1 et 10.

3. On peut penser à garder comme diviseurs tous les chiffres (les chiffres sont des nombres) : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Le nombre 10 (donc le chiffre 0) est obtenu avec 2 et 5. Le nombre 9 est obtenu avec 3 et 6 et le nombre 8 avec 3 et 6 aussi. Le chiffre 7 peut être obtenu avec 3×9.
De $5\,040 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$, on passe à $2^2 \times 3^3 \times 5 = 540$. On peut vérifier que :

$$\begin{aligned}540 = 1 \times 540 &= 2 \times 270 = 3 \times 180 = 4 \times 135 = 5 \times 108 = 6 \times 90 = 9 \times 60 = 10 \times 54 = 12 \times 45 \\ &= 15 \times 36 = 18 \times 30 = 20 \times 27\end{aligned}$$

On cherche s'il y a des entiers inférieurs à 540 possédant la propriété.
a. Ces nombres ont un diviseur terminé par un 0, donc ils sont divisibles par 10.
b. Si p est un nombre premier distinct de 2 et 5, tout nombre $N = 10p$ a 8 diviseurs : $N = 1 \times 10p = 2 \times 5p = 5 \times 2p = 10 \times p$. C'est insuffisant pour obtenir tous les chiffres des unités.
c. Le chiffre 7 ne peut être obtenu que l'un des nombres 7 ou 27 est un diviseur de N (le suivant de la liste non premier est 57, mais $57 \times 10 = 570$).

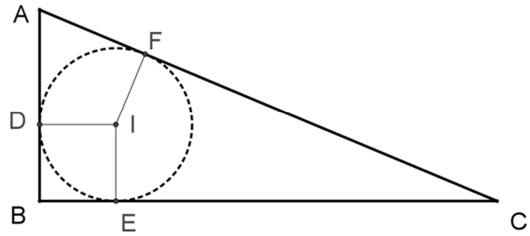
Les nombres à examiner sont donc : 140, 210, 270, 280, 350, 420, 490
140 n'a pas de diviseur terminé par 3
210 n'a pas de diviseur terminé par 8
On trouve que $270 = 1 \times 270 = 2 \times 135 = 3 \times 90 = 5 \times 54 = 6 \times 45 = 9 \times 30 = 10 \times 27 = 15 \times 18$

Le nombre 270 est la solution du problème.

Exercice 3
Le deuxième triplet pythagoricien

1. $13^2 = 12^2 + 5^2$. Le triangle est rectangle en vertu de la réciproque du théorème de Pythagore.

2. Appelons R le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC.



L'aire $\mathcal{A}$ de ce triangle peut être exprimée de deux manières :

a. Demi-produit des deux côtés de l'angle droit

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times 5 \times 12$$

b. Somme des aires des triangles IAC, IBC et IAB

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}R \times 13 + \frac{1}{2}R \times 12 + \frac{1}{2}R \times 5$$

D'où l'égalité $30 = 15R$. Finalement $R = 2$.

3. On s'inspire de la méthode précédente, découpant l'aire du triangle ABC chaque fois en quatre parties. Quels sont les rayons de ces cercles, dans les trois cas représentés ?

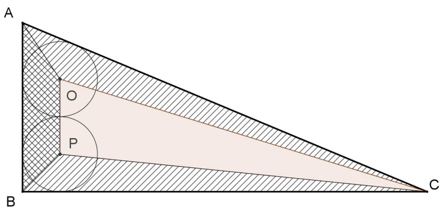


Figure 1

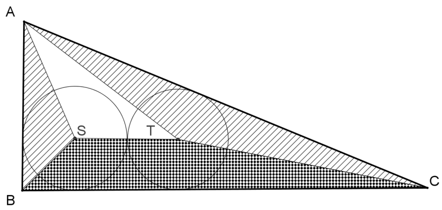


Figure 2

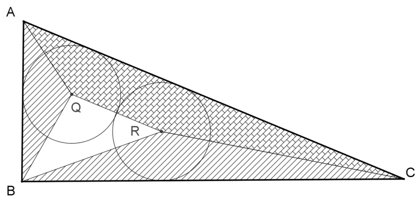


Figure 3

Dans les trois cas, le triangle rectangle est partagé en trois triangles et un trapèze (la ligne des centres des cercles est parallèle à un côté du triangle). Sans entrer dans les situations particulières, on peut appeler a, b, c les côtés du triangle et R le rayon commun des deux cercles. L'aire du triangle s'écrit :

$\mathcal{A} = \frac{1}{2}Ra + \frac{1}{2}Rb + \frac{1}{2}(2R)(a - R) + \frac{1}{2}(2R + c)R$ lorsque la ligne des centres est parallèle à un côté de l'angle droit. D'où on tire : $\mathcal{A} = \frac{3}{2}Ra + \frac{1}{2}Rb + \frac{1}{2}Rc$

Pour $a = 12, b = 13$ et $c = 5$, on obtient $27R = 30$, donc $R = \frac{10}{9}$ (*Figure 1*)

Pour $a = 5, b = 13, c = 12$, on obtient $20R = 30$, donc $R =$1,5 (*Figure 2*)

Dans le cas où la ligne des centres est parallèle à l'hypoténuse, la hauteur du triangle blanc de la figure 3 est la différence entre la hauteur h du triangle et le rayon cherché. L'aire s'écrit :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}Ra + \frac{1}{2}Rb + \frac{1}{2}2R(h - R) + \frac{1}{2}(2R + c)R$$

Cette fois, $a = 5, b = 12, c = 13$ et $h = \frac{ab}{c} = \frac{60}{13}$ et, finalement :$R = \frac{26}{17}$ (*Figure 3*)

Remarque : la mesure de la hauteur résulte d'une égalité d'angles, et donc de cosinus.