

## Premières fois (Série S)

### Éléments de solution

1. En écrivant  $p^2 = p \times p$  et en appliquant la définition :  $\Delta(p^2) = p \times \Delta(p) + \Delta(p) \times p = 2p$ .

On poursuit :  $\Delta(p^3) = \Delta(p \times p^2) = 1 \times p^2 + p \times 2p = 3p^2$ .

Supposons que pour un entier naturel  $n$ , sur lequel on ne fait aucune autre hypothèse, on ait :  $\Delta(p^n) = n \times p^{n-1}$ .

En appliquant la définition, on obtient :  $\Delta(p^{n+1}) = p \times \Delta(p^n) + 1 \times p^n$ , ce qui donne, en utilisant notre hypothèse  $\Delta(p^{n+1}) = n \times p^n + p^n = (n+1)p^n$ .

Finalement pour tout entier premier  $p$  et tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1 :  $\Delta(p^n) = np^{n-1}$ .

2. a.  $\Delta(p^m \times q^n) = \Delta(p^m) \times q^n + p^m \times \Delta(q^n) = mp^{m-1} \times q^n + p^m \times nq^{n-1} = (mq + np)p^{m-1}q^{n-1}$

b. On applique le résultat précédent à  $10^n = 2^n \times 5^n$ . On obtient  $\Delta(2^n \times 5^n) = (5n + 2n)10^{n-1}$ .

Le second membre de l'égalité est bien multiple de 7.

3. Le nombre  $n$  peut être écrit  $n = p_1^{\alpha_1} \times n_1$ , les nombres premiers apparaissant dans la décomposition de  $n_1$  étant les mêmes et avec les mêmes exposants que dans la décomposition de  $n$ , sauf évidemment  $p_1$ . Avec cette écriture,  $\Delta(n) = \alpha_1 p_1^{\alpha_1-1} \times n_1 + p_1^{\alpha_1} \times \Delta(n_1) = \alpha_1 \times q_1 + p_1^{\alpha_1} \times \Delta(n_1)$ .

La prochaine étape fera apparaître le produit  $p_1^{\alpha_1} \times \alpha_2 \times p_2^{\alpha_2-1} \times n_2$ , où  $n_2$  fait apparaître les nombres premiers apparaissant dans la décomposition de  $n$ , avec les mêmes exposants, sauf  $p_1$  et  $p_2$ , etc. D'où le résultat :  $\Delta(n) = \alpha_1 \times q_1 + \alpha_2 \times q_2 + \alpha_3 \times q_3 + \dots + \alpha_k \times q_k$ .

4. Pour un nombre premier  $p$ , le calcul est rapide,  $\alpha_1 = 1$  et  $q_1 = 1$  donc  $\Delta(p) = 1$ .

Pour le produit de deux nombres entiers  $a$  et  $b$ , on peut, dans la décomposition en produit de facteurs premiers de  $ab$ , « étiqueter » les nombres premiers qui figureraient à la fois dans les décompositions de  $a$  et de  $b$  en les traitant comme des premiers distincts. On adapte la formule ci-dessus donnant  $\Delta(n)$ , en convenant par exemple pour calculer  $\Delta(a)$  de remplacer  $\alpha_i$  par 0 si l'entier premier  $p_i$  apparaît dans la décomposition de  $b$  mais pas dans celle de  $a$ . On aurait, en adaptant les notations :  $\Delta(a) = \alpha_1 \times q_1 + \alpha_2 \times q_2 + \alpha_3 \times q_3 + \dots + \alpha_k \times q_k$ ,  $\Delta(b) = \beta_1 \times r_1 + \beta_2 \times r_2 + \beta_3 \times r_3 + \dots + \beta_k \times r_k$ . La somme  $a \times \Delta(b) + \Delta(a) \times b$  fait alors apparaître des termes comme  $\alpha_1 \times q_1 \times b + \beta_1 \times r_1 \times a$ , mais  $b \times q_1 = a \times r_1$  (c'est aussi le quotient de  $ab$  par  $p_1$ ), et donc ce terme est exactement  $(\alpha_1 + \beta_1)s_1$ , où  $s_1$  est le quotient de  $ab$  par  $p_1$  et  $\alpha_1 + \beta_1$  l'exposant de  $p_1$  dans la décomposition de  $ab$ .

Conclusion : les propriétés imposées permettent de définir une application  $\Delta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  qui les possède. Tout repose évidemment sur l'existence de la décomposition en produit de facteurs premiers, que nous avons admise pour ce problème.

#### Étude de quelques images d'entiers par la fonction $\Delta$ .

5. a.  $\Delta(12) = 2 \times 2 \times 3 + 2^2 \times 1 = 16$ ,  $\Delta(56) = 3 \times 2^2 \times 7 + 8 \times 1 = 92$ ,

$\Delta(1\ 001) = 11 \times 13 + 7 \times 13 + 7 \times 11 = 311$ .

b. Aucun  $x$  entier composé non nul ne peut satisfaire  $\Delta(x) = 0$ , car  $\Delta(x)$  est dans ce cas une somme d'entiers positifs. Les seules solutions sont 0 et 1.

c. Les nombres premiers sont par définition solutions de  $\Delta(x) = 1$ . Dans la formule donnant en général  $\Delta(n)$ , pour que cette somme de termes positifs soit égale à 1, il faudrait que tous les termes fussent nuls sauf un, égal à 1. Ce n'est pas possible, le produit de deux entiers ne peut être égal à 1 que s'ils le sont l'un et l'autre.

d. Le nombre 2 n'a pas d'antécédent par  $\Delta$ . La raison est la même que ci-dessus : il faudrait deux termes égaux à 1 dans la somme permettant le calcul de  $\Delta(n)$ , ou un terme égal à 2. Mais s'il y a un terme égal à 2, il y en a nécessairement un autre, car  $\Delta(2^2) = 2 \times 2$  (l'un vient de l'exposant).

e. On a donné des exemples de la situation contraire à la question 5. a.

6. a. Si  $p$  et  $q$  sont des nombres premiers, on trouve  $\Delta(p \times q) = p \times \Delta(q) + q \times \Delta(p) = p + q$

b. On a trouvé  $\Delta(12) = 16$ , tandis que  $\Delta(4) + \Delta(3) = 4 + 1 = 5$ . La réponse est non.

7. a. On a trouvé  $\Delta(56) = 92$ , tandis que  $\Delta(49) = 14$  et  $\Delta(7) = 1$ .

b. Dans l'hypothèse envisagée, on obtient :  $\Delta(ka + kb) = \Delta(k \times (a + b)) = (a + b) \times \Delta(k) + k \times \Delta(a + b)$ .

Ou encore :  $\Delta(ka + kb) = a \times \Delta(k) + b \times \Delta(k) + k \times \Delta(a) + k \times \Delta(b)$ , d'où le résultat, en réorganisant.

#### Les points fixes de la fonction $\Delta$

8. a. Il existe un entier  $k$  tel que  $m = k \times p^p$ . On a :  $\Delta(m) = \Delta(k) \times p^p + p \times p^{p-1} \times k = p^p \times (\Delta(k) + k)$

b.  $\Delta(n)$  s'écrit comme combinaison linéaire des quotients de  $n$  par les chacun des nombres premiers apparaissant dans sa décomposition. Ces quotients sont des produits des nombres premiers apparaissant dans la décomposition de  $n$ , pour chaque terme de la combinaison linéaire, un des exposants a été diminué de 1. Mais un

des facteurs premiers peut être « rétabli » par le coefficient qui l'affecte dans la combinaison linéaire, c'est-à-dire par son exposant originel, c'est le cas des nombres qui interviennent avec un exposant qui leur est égal...

**9.** D'après ce qui précède, l'exposant originel ne peut être rétabli que dans le cas où  $n = p^p$ .